

## Wiederholung 11. Klasse Analysis

1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{10}(-x^3 + 15x^2 - 56x + 12)$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .

Der Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2017 AI)

1.1 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen  $G_f$  mit den Koordinatenachsen. ☐

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von  $G_f$ .

Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle. ☒

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von  $G_f$ . ☒

1.4 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen  $G_f$  im Bereich  $-1 \leq x \leq 10$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm. ☐

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$  und  $D_f = \mathbb{R}$ .

(Abitur 2017 AII)

2.1 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion  $f$  und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen  $G_f$ . ☐

2.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $f$  sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen  $G_f$ . ☒

2.3 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph  $G_f$  genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordinaten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von  $G_f$ , welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben. ☒

2.4 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen  $G_f$  im Bereich  $-2,5 \leq x \leq 2,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem.

Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich  $-5 \leq y \leq 5$  benötigt. ☐  
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

2.5 Zeigen Sie, dass an der Stelle  $x = -2$  die Gleichung  $f(x) - f'(x) = 0$  gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen  $G_f$  bedeutet. ☒

2.6 Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  an und zeichnen Sie den Graphen  $G_{f'}$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein. ☒

3 Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist der Graph  $G_h$  einer ganzrationalen Funktion  $h$  symmetrisch zur  $y$ -Achse, dann ist der Graph  $G_{h'}$  der ersten Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung. (Abitur 2017 All) ☐

4.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ . Der Graph der Funktion  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2018 All)

4.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  mit der jeweiligen Vielfachheit. ☐

4.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $f$  sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen  $G_f$ . ☒

4.3 Ermitteln Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen  $G_f$ . ☒

4.4 Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich  $-1 \leq x \leq 4$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der  $y$ -Achse der Bereich  $-3 \leq y \leq 3$  benötigt. Maßstab: 1 LE = 1 cm. ☐

4.5.0 Betrachtet wird nun die quadratische Funktion  $p$  mit der Definitionsmenge  $D_p = \mathbb{R}$ . Ihr Graph wird mit  $G_p$  bezeichnet.

4.5.1 Die Parabel  $G_p$  berührt den Graphen  $G_f$  aus 4.0 im Punkt  $B(3/3)$  und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie  $p(x)$  und zeichnen Sie die Parabel  $G_p$  im Bereich  $-1 \leq x \leq 4$  in das vorhandene Koordinatensystem ein. ☒

(Mögliches Ergebnis:  $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ )

4.5.2 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunktes der Graphen  $G_f$  und  $G_p$ , der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. ☒

4.5.3 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt  $T(3/4)$ , die den Graphen  $G_p$  berühren. ☒

5.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ . Der Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2018 All)

5.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von  $G_f$  bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  und für  $x \rightarrow \infty$  an. ☒

5.2 Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an. ☐

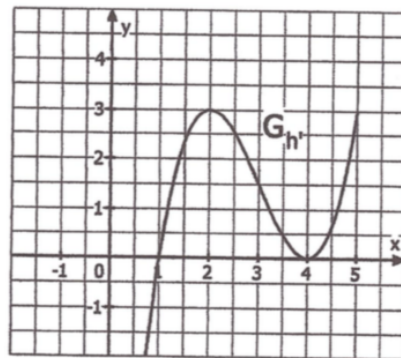
5.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 5.1 und 5.2, dass an der Stelle  $x = 0$  ein relatives und zugleich absolutes Minimum von  $f$  vorliegen muss. ☒

5.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen  $x = 1$  und  $x = 3$  Wendestellen von  $f$  liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terrassenpunkt ist. 

5.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 5.4 legen die Gerade  $G_g$  fest. Ermitteln Sie deren Gleichung. 

5.6 Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  und  $G_g$  unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich  $-1 \leq x \leq 4,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm. 

6 Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung  $h'$  der Funktion  $h$  mit der Definitionsmenge



$D_h = \mathbb{R}$ . (Abitur 2018 All)

Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen: 

- a)  $G_h$  hat einen Tiefpunkt bei  $x = 1$ .
- b)  $G_h$  hat einen Tiefpunkt bei  $x = 4$ .
- c)  $G_h$  hat einen Wendepunkt bei  $x = 2$ .
- d) Die Tangente an den Graphen  $G_h$  in  $x = 2$  verläuft parallel zur Geraden  $e$  mit der Gleichung  $y = 3x + 7$ .

7.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph  $G_f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$  besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle  $x = -2$ . (Abitur 2019 Teil 1)

7.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von  $f$  einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$  an. 

7.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen  $G_{f'}$  der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion  $f'$ , die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_{f'}$  an. 

8.0 Für eine ganzrationale Funktion  $f$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$  gelten folgende Gleichungen:

- I.  $f(0) = 0$       II.  $f'(0) = 0$   
III.  $f(-3) = -3$     IV.  $f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.

(Abitur 2019 Teil 2 AI)

8.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von  $f$  aufgrund obiger Gleichungen hat. ☐

8.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von  $f$ . ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$ )

8.3.0 Im Folgenden wird die Funktion  $g$  mit  $g(x) = f(x)$  und der im Vergleich zu  $D_f$  eingeschränkten Definitionsmenge  $D_g = [-4, 5; 1]$  betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.

8.3.1 Ermitteln Sie die Wertemenge  $W_g$  der Funktion  $g$ . Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte. ☒

8.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $g$ . ☒

8.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_g$  in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion  $g$ . Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. ☐

9.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion  $w$  mit der Funktionsgleichung  $w(t) = at^4 + bt^3 + c$  mit geeigneten Werten  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und der Definitionsmenge  $D_w = [0; 30]$  beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable  $t$  die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

Der Funktionswert  $w(t)$  gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm.

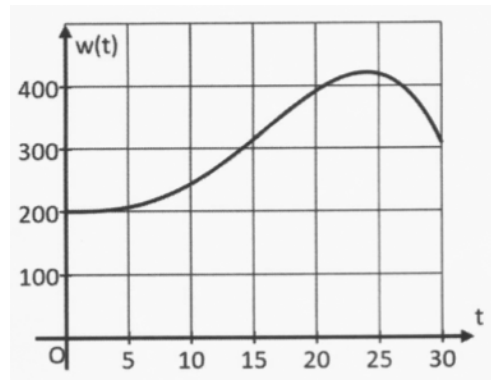
Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt  $t_{\max} = 24$  – gemessen.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand  $w(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)



9.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  und damit die zugehörige Funktionsgleichung von  $w$ . 

(mögliches Ergebnis:  $w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$ )

9.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau. 

9.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war. 

## Lösungen

1.1

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $f(0) = \frac{1}{10} \cdot 12 = 1,2 \Rightarrow S_y(0/1,2)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:  $f(x) = 0$

$$\Rightarrow -x^3 + 15x^2 - 56x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(-x^3 + 15x^2 - 56x + 12) : (x - 6) = -x^2 + 9x - 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 9x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx 0,23 \quad x_3 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 8,77$$

$$N_1(6/0) \quad N_2\left(\frac{9 - \sqrt{73}}{2} / 0\right) \quad N_3\left(\frac{9 + \sqrt{73}}{2} / 0\right)$$

1.2

$$f'(x) = \frac{1}{10}(-3x^2 + 30x - 56)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 30x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-30 + \sqrt{228}}{-6} \approx 2,5 \quad x_2 = \frac{-30 - \sqrt{228}}{-6} \approx 7,5$$

Skizze von  $f'$ :

$$\Rightarrow x_1 = 2,5 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(2,5 / -5,0)$$

$$x_2 = 7,5 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(7,5 / 1,4)$$

1.3

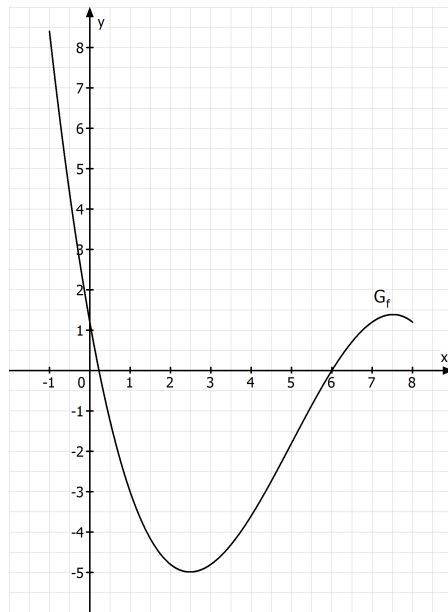
$$f''(x) = \frac{1}{10}(-6x + 30)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 30 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Skizze von  $f''$ :

$$\Rightarrow G_f \text{ linksgekrümmt in } ]-\infty; 5] \quad G_f \text{ rechtsgekrümmt in } [5; \infty[$$

## 1.4



## 2.1

$$f(x) = 0 \Rightarrow -0,5x^2(x^2 - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ (doppelt)} \quad x_2 = -\sqrt{6} \text{ (einfach)} \quad x_3 = \sqrt{6} \text{ (einfach)}$$

$$\Rightarrow \text{bei } x = 0 \text{ Berührungspunkt mit der } x\text{-Achse und bei } x_2 = -\sqrt{6}$$

$$\text{und } x_3 = \sqrt{6} \text{ Schnittpunkte mit der } x\text{-Achse}$$

## 2.2

$$f'(x) = -0,5(4x^3 - 12x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\sqrt{3} \quad x_3 = \sqrt{3}$$

Skizze von  $f'$ :

$$\Rightarrow G_f \text{ ist sms in } ]-\infty; -\sqrt{3}] \text{ sowie in } [0; \sqrt{3}]$$

$$G_f \text{ ist smf in } [-\sqrt{3}; 0] \text{ sowie in } [\sqrt{3}; \infty[$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ HOP } \text{HOP}(-\sqrt{3}; 4,5)$$

$$x = 0 \text{ TIP } \text{TIP}(0/0)$$

$$x = \sqrt{3} \text{ HOP } \text{HOP}(\sqrt{3}; 4,5)$$

- 2.3  $G_f$  ist der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades und zwischen den drei Extrema muss jeweils ein Wendepunkt liegen, also damit genau zwei Wendepunkte. Wegen Achsensymmetrie zur y-Achse gilt:  $W_2(-1/2, 5)$ .

$$f(x) = 2,5 \Rightarrow -0,5(x^4 - 6x^2) = 2,5 \Rightarrow x^4 - 6x^2 = -5 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

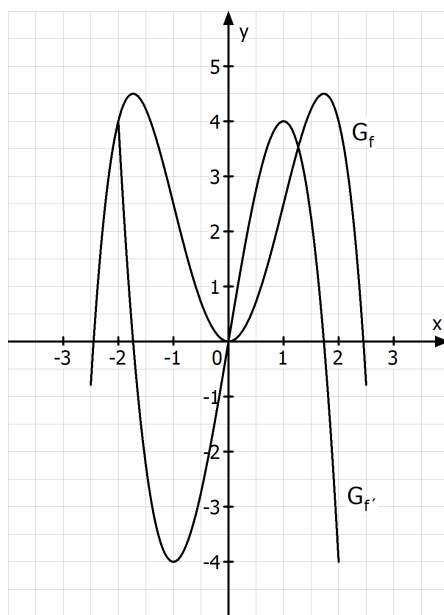
Substitution:  $z = x^2$

$$\Rightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \Rightarrow z_1 = 5 \quad z_2 = 1$$

$$1) x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5} \quad x_2 = \sqrt{5}$$

$$2) x^2 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \quad x_4 = 1$$

2.4



2.5

$$f(-2) - f'(-2) = 0$$

$$-0,5((-2)^4 - 6(-2)^2) + 0,5(4(-2)^3 - 12(-2)) = -0,5(-8) + 0,5(-8) = 0$$

$$-0,5(x^4 - 6x^2) + 0,5(4x^3 - 12x) = 0 \Rightarrow -0,5x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x(-0,5x^3 + 2x^2 + 3x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-0,5x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$(-0,5x^3 + 2x^2 + 3x - 6) : (x + 2) = -0,5x^2 + 3x - 3$$

$$-0,5x^2 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = 3 - \sqrt{3} \quad x_4 = 3 + \sqrt{3}$$

An diesen Stellen ist die Steigung des Graphen  $G_f$  gleich der zugehörigen y-Koordinate des Punktes.

2.6

$$\text{Nullstellen von } f': x_1 = -\sqrt{3} \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \sqrt{3}$$

$$\text{Extremstellen von } f': x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

- 3 Wenn h nur gerade Exponenten hat, dann muss die 1. Ableitungsfunktion nur ungerade Exponenten haben und damit ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

4.1

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{9}x^3(-x+4) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ (dreifach)} \quad x_2 = 4 \text{ (einfach)}$$

4.2

$$f'(x) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2) = \frac{4}{9}x^2(-x+3) \Rightarrow \frac{4}{9}x^2(-x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Skizze von  $f'$ :

$$G_f \text{ ist sms in } ]-\infty; 3] \quad G_f \text{ ist smf in } [3; \infty[$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(3/3)$$

4.3

$$f''(x) = \frac{1}{9}(-12x^2 + 24x) = \frac{4}{3}x(-x+2)$$

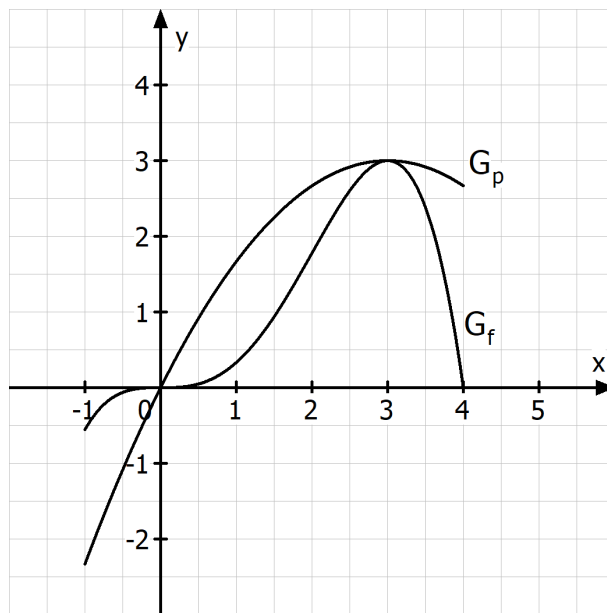
$$\frac{4}{3}x(-x+2) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \text{ Wendestellen wegen VZW}$$

$$\text{Tangente 1: WP}(0/0) \quad f'(0) = 0 \Rightarrow t(x) = 0$$

$$\text{Tangente 2: WP}(2/\frac{16}{9}) \quad f'(2) = \frac{16}{9} \quad \frac{16}{9} = \frac{16}{9} \cdot 2 + t \Rightarrow t = -\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{16}{9}x - \frac{16}{9}$$

4.4



4.5.1

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad p(3) = 3 \quad \Rightarrow 9a + 3b = 3$$

$$(II) \quad f'(3) = p'(3) \quad \Rightarrow 6a + b = 0$$

$$(III) \quad p(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$$

$$-3 \cdot (II) + (I): -9a = 3 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$(II) \Rightarrow 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + b = 0 \quad \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$$

#### 4.5.2

$$p(x) = f(x)$$

$$\frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot \left( \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \quad (\text{siehe 4.1.5.1})$$

$$\left( \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \right) : (x-3) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x_{3/4} = \frac{\frac{1}{9} \pm \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{8}{27}}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9} \pm \frac{5}{9}}{\frac{2}{9}} \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -2$$

$$x = 3 \text{ nicht im III. Quadranten} \Rightarrow P\left(-2 / -\frac{16}{3}\right)$$

#### 4.5.3

$$y = mx + t \quad T(3/4) \quad 4 = 3m + t \Rightarrow t = 4 - 3m$$

$$\Rightarrow y = mx + 4 - 3m$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 2x = mx + 4 - 3m \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 2x - mx + 3m - 4 = 0$$

$$\text{Berührungspunkt} \Rightarrow D = 0$$

$$D = (2-m)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (3m-4) = m^2 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow m_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad m_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

5.1  $G_f$  ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, weil im Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten auftreten.

#### 5.2

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 18x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 8x + 18) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 - 8x + 18 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$\Rightarrow f$  hat eine Nullstelle bei  $x = 0$  (doppelt)

#### 5.3

$x = 0$  doppelte Nullstelle von  $f \Rightarrow x = 0$  einfache Nullstelle von  $f' \Rightarrow \text{Extrempunkt}$

Da  $x = 0$  die einzige Nullstelle ist und nach 4.2.1  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt,

muss  $x = 0$  relatives und zugleich absolutes Minimum sein.

5.4

$$f'(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 24x^2 + 36x) \quad f''(x) = \frac{1}{5}(12x^2 - 48x + 36)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

Skizze von  $f''$ :

$\Rightarrow x_1 = 3$  und  $x_2 = 1$  Wendepunkte wegen VZW

$$f'(3) = 0 \quad f'(1) \neq 0 \Rightarrow \text{TEP bei } x = 3$$

$$\text{WP}(1/2, 2) \quad \text{TEP}(3/5, 4)$$

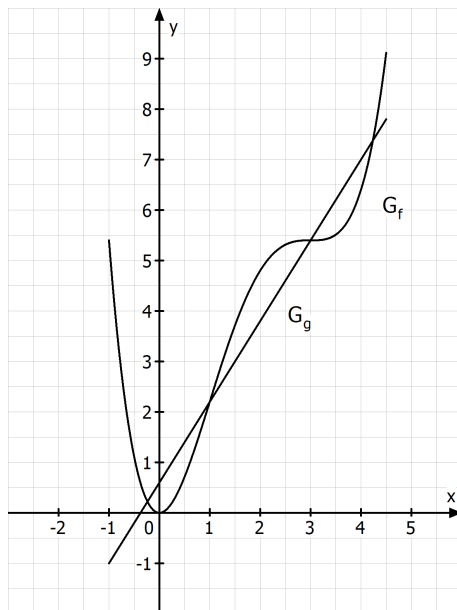
5.5

$$g: y = mx + t \quad m = \frac{5,4 - 2,2}{3 - 1} = 1,6$$

$$2,2 = 1,6 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 0,6$$

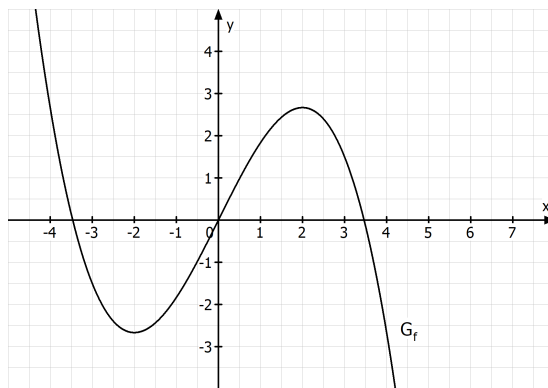
$$\Rightarrow g: y = 1,6x + 0,6$$

5.6



- 6 a) Richtig, da bei  $x = 1$  Nullstelle von  $f'$  und VZW von  $-$  auf  $+$ .  
 b) Falsch, da bei  $x = 4$  doppelte Nullstelle von  $f'$  und damit kein Extrempunkt.  
 c) Richtig, da  $f'$  bei  $x = 2$  eine Extremstelle besitzt.  
 d) Richtig, da  $f'(2) = 3$ , also hat die Tangente die Steigung von 3.

7.1



$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

7.2  $G_{f'}$  ist eine nach unten geöffnete Parabel.

$G_{f'}$  hat zwei Nullstellen bei  $x = -2$  und  $x = 2$ , der Extrempunkt von  $f'$  muss bei  $x = 0$

liegen und  $G_{f'}$  ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

8.1  $G_f$  hat eine Nullstelle bei 0 und bei  $x = 0$  eine Steigung von 0.  $G_f$  hat bei  $x = -3$  einen Funktionswert von -3 und bei  $x = -3$  eine Steigung von -1.

8.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(II) f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(III) f(-3) = -3 \Rightarrow -27a + 9b = -3$$

$$(IV) f'(-3) = -1 \Rightarrow 27a - 6b = -1$$

$$(III) + (IV) \Rightarrow 3b = -4 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$(IV) \Rightarrow 27a + 8 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$$

8.3.1

$$g'(x) = -x^2 - \frac{8}{3}x \Rightarrow -x^2 - \frac{8}{3}x = 0 \Rightarrow x \left( -x - \frac{8}{3} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{8}{3}$$

Skizze von  $g'$ :

$$\Rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ TIP } \text{TIP} \left( -\frac{8}{3} / -\frac{256}{81} \right) \quad x = 0 \text{ HOP } \text{HOP}(0/0)$$

$$x = -4,5 \text{ Randmaximum } (-4,5/3,375)$$

$$x = 1 \text{ Randminimum } \left( 1 / -\frac{5}{3} \right)$$

$$\Rightarrow W_g = \left[ -\frac{256}{81}; 3,375 \right]$$

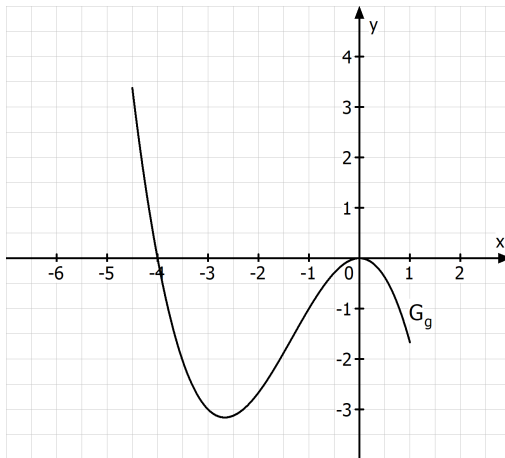
8.3.2

$$g''(x) = -2x - \frac{8}{3} \quad -2x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3} \text{ ist eine einfache Nullstelle von } g'' \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{WP}$$

$$\text{WP} \left( -\frac{4}{3} / -\frac{128}{81} \right)$$

$$8.3.3 \quad -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \cdot (x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4$$



9.1

$$w(t) = at^4 + bt^3 + c$$

$$(I) \quad w(0) = 200 \Rightarrow c = 200$$

$$(II) \quad w(30) = 308 \Rightarrow 810000a + 27000b + c = 308$$

$$(III) \quad w'(24) = 0 \quad w'(t) = 4at^3 + 3bt^2 \\ \Rightarrow 55296a + 1728b = 0$$

$$(II) \quad 810000a + 27000b = 108$$

$$(III) \quad 55296a + 1728b = 0 \Rightarrow b = -32a$$

$$(II) \Rightarrow 810000a - 864000a = 108 \Rightarrow a = -\frac{1}{500}$$

$$\Rightarrow b = -32 \cdot \left(-\frac{1}{500}\right) = \frac{8}{125}$$

$$\Rightarrow w(t) = -\frac{1}{500}t^4 + \frac{8}{125}t^3 + 200$$

$$9.2 \quad w(24) = 421 \text{ cm}$$

9.3

$$w'(t) = -\frac{4}{500}t^3 + \frac{24}{125}t^2 \quad w''(t) = -\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t$$
$$-\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t = 0 \Rightarrow t \cdot \left( -\frac{12}{500}t + \frac{48}{125} \right) \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 16$$

Skizze von  $w''$  : $\Rightarrow t = 16$  Maximum von  $w'$ 

Da  $w'$  im Bereich  $[0;30]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $t = 16$   
 $\Rightarrow$  am 17. März 2010 war die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten.